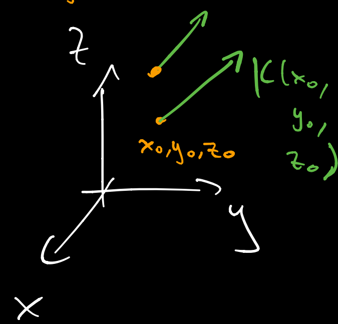
Übungsstunde Analysis 2:

Heutige Themen:

- Vektorfelder
- Linienintegrale
- Konservative Felder & Potentiale

Vektoren sind im jeweiligen Punkt "angeheftet".



Vektorfelder: Betrachten 2D bzw. 3D

Unterschiede Skalarfeld vs. Vektorfeld:

Skalarfeld: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Beispiele: Temperatur- oder Druckverteilungen, Potential eines elektrostatischen Feldes
- Darstellung: Niveaulinien bzw. Niveauflächen

Vektorfeld: $v: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$K(x)$: Kraftfeld
$v(x)$: Strömungsfeld

Ist v eine C^k-Abbildung, so nennt man v ein C^k Vektorfeld.

- Beispiele: Elektrisches Feld, allgemeine Kraftfelder e.g. Gravitationsfeld, Strömungsfelder $v(x)$ ist die Geschwindigkeit von Material in x, Gradientenfelder $v(x) = \nabla f(x)$ mit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Potential
- Darstellung: Feldlinien

Länge d. Vektoren $\to$ Stärke des Feldes

- Eigenschaften: Die Vektorfelder auf Ω bilden einen $\mathbb{R}$ Vektorraum, d.h. sind v_1 & v_2 VF, so ist $v_1 + \lambda v_2$ wieder ein VF $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
  Allgemeiner kann λ auch wieder eine Funktion sein $\lambda : \Omega \to \mathbb{R} \rightsquigarrow v_1(x) + \lambda(x) v_2(x)$ ein VF.

Def: Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diffbar & $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein VF.
Dann heisst die Richtungsableitung von f in x in Richtung $v(x)$ Ableitung von f in x längs des VF v:

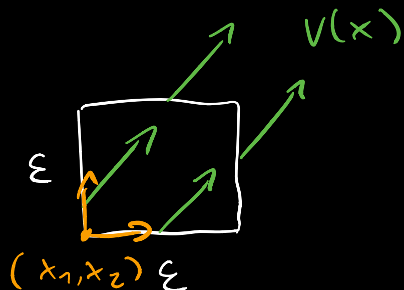
$$\partial_v f(x) = (\partial_v f)(x) = \partial_{v(x)} f(x) = \boxed{df(x)v(x)} = f'(x)v(x)$$

Divergenz: Sei $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein diffbares VF, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.
Dann ist die Divergenz von v definiert als

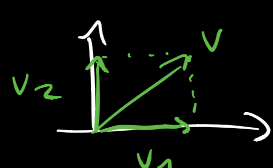
↳ Definiert für $\mathbb{R}^n$?

$$\boxed{\operatorname{div}(v(x)) = \nabla \cdot v(x) = \partial_{x_1} v_1(x) + \partial_{x_2} v_2(x) + \ldots + \partial_{x_n} v_n(x)}$$

Physikalische Intuition:



$$v(x) = \begin{bmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{bmatrix}$$



Sei v ein Strömungsfeld (in 2D). Betrachten kleines Volumenelement. Wir berechnen näherungsweise den Material<u>zufluss</u> ins Volumenelement:

$$\Delta Vol = \varepsilon v_1(x) + \varepsilon v_2(x) - \varepsilon v_1(x_1+\varepsilon, x_2) - \varepsilon v_2(x_1, x_2+\varepsilon)$$

Pro Volumen:

$$\frac{\Delta Vol}{\varepsilon^2} = \underbrace{\frac{v_1(x) - v_1(x_1+\varepsilon, x_2)}{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{v_2(x) - v_2(x_1, x_2+\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \underline{\underline{-\partial_{x_1} v_1(x) \quad - \partial_{x_2} v_2(x)}}$$

$\Rightarrow$ Volumenabfluss $= \operatorname{div}(v(x))$

Volumenzufluss $= -\operatorname{div}(v(x))$

$\rightsquigarrow$ "Quelldichte" $= \operatorname{div}(v(x))$

Bsp: Das Strömungsfeld v einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt $\operatorname{div}(v(x)) = 0$.

Rotation:

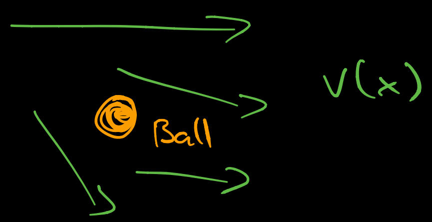
Def: Sei $v: \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein diffbares VF, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

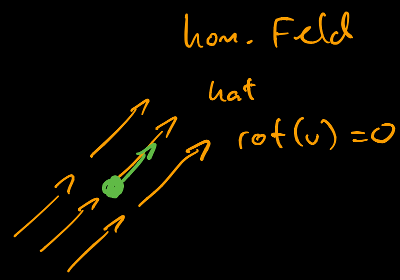
Definiert nur für $\mathbb{R}^2$ & $\mathbb{R}^3$!

Dann ist die Rotation von $v(x)$ definiert als

$$\boxed{\operatorname{rot}(v(x)) = \operatorname{curl}(v(x)) = \nabla \times v = \begin{bmatrix} \partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2 \\ \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3 \\ \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1 \end{bmatrix}}$$

Physikalische Interpretation:





Interpretiert man v als Strömungsdichte, so kann man $\operatorname{rot}(v)$ als "Wirbeldichte" auffassen.

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}(v) = 0 \rightsquigarrow \text{"Potentialfeld"}}$$

Rechenregeln:

- Für $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{div} \cdot \operatorname{grad}(f) = \nabla \cdot \nabla f = \Delta f = \partial_{x_1}^2 f + \dots + \partial_{x_n}^2 f$.

  mit $\boxed{\Delta := \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \dots + \partial x_n^2 \text{ der Laplace-Operator}}$

- Für $v: \Omega \to \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{div}(f \cdot v) = \nabla \cdot (f \cdot v) = (\nabla f) \cdot v + f \cdot (\nabla v)$$
$$\operatorname{rot}(f \cdot v) = \nabla \times (f \cdot v) = (\nabla f) \times v = f \cdot (\nabla \times v)$$

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0 = \nabla \times (\nabla f)$

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(v)) = 0 = \nabla \cdot (\nabla \times v)$

- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(v)) = \nabla \times \nabla \times v = \nabla(\nabla \cdot v) - \Delta v$

Eigenschaften von Vektorfeldern:

Kraftfelder: Linienintegrale $\to$ geleistete Arbeit, Potential-differenz

$K(x)$

Strömungsfelder: Flächenintegrale $\to$ Durchfluss durch die betreffende Fläche

$v(x)$

Gradientenfeld: $\nabla f = \begin{bmatrix} \partial x_1 f_1 \\ \vdots \\ \partial x_n f_n \end{bmatrix}$ ein VF auf Ω, das sogenannte Gradientenfeld von f. Die Feldvektoren von ∇f stehen überall senkrecht auf den Niveaulinien von f. Viele Vektorfelder lassen sich als Gradienten-feld als Gradientenfeld eines geeigneten f auffassen.

aber nicht alle!

Zentralfelder:

Ein in allen Punkten $r \neq 0$ definiertes Feld

$$K(r) = |K(r)| \frac{\vec{r}}{r}$$

heisst Zentralfeld.

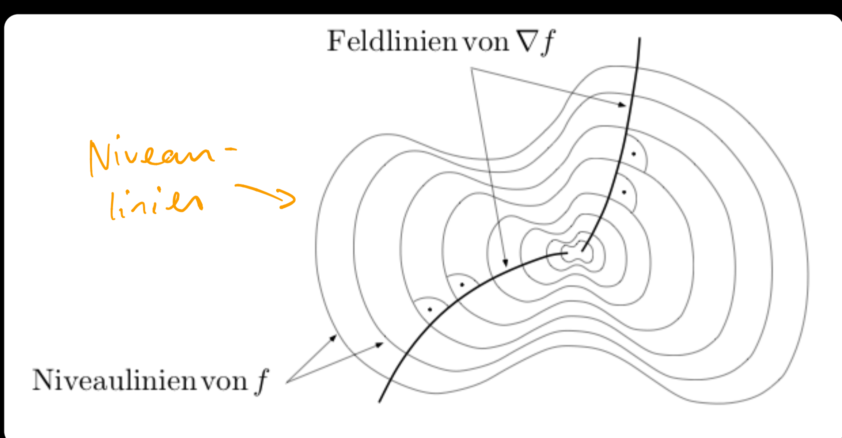
Homogene Felder:

Gilt $K(x) \equiv K_0$, so nennt man K ein homogenes VF.

Singuläre & reguläre Punkte

Die Nullstellen eines VF v heissen singuläre Punkte, sie liegen im Allgemeinen isoliert.
Alle übrigen Punkte heissen regulär.

Feldlinien:



f ein Skalarfeld

∇f ist das dazugehörige Gradientenfeld

Kurven γ, welche in jeden Punkt parallel zum Vektorfeld sind.

$\rightsquigarrow$ Nach dem Existenzsatz geht durch jeden regulären Punkt genau eine Feldlinie.

Bei Feldlinien geht Information über den Betrag & das Vorzeichen der Feldvektoren verloren.

Zeichnen: irgendwo beginnen und der Richtung der Feldvektoren folgen.

Zsmhg Vektorfelder & mehrdim. Differentialrechnung:

Die Feldlinien γ eines VF v besitzen eine natürliche Parameterdarstellung

$$\gamma : \; t \to x(t) \qquad (1)$$

mit den Geschwindigkeitsvektor

$$\boxed{\dot{x}(t) = v(x(t))}$$

Die Fkt. (1) ist die Lösung einer t-freien Differentialgleichung

$$\dot{x} = v(x) \qquad (2)$$

In Koordinaten ausgeschrieben ist dies ein System

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1,x_2,x_3) \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1,x_2,x_3) \\ \dot{x}_3 &= v_3(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

von n (hier 3) Dgl. für n unb. Fkt $t \mapsto x_i(t)$.

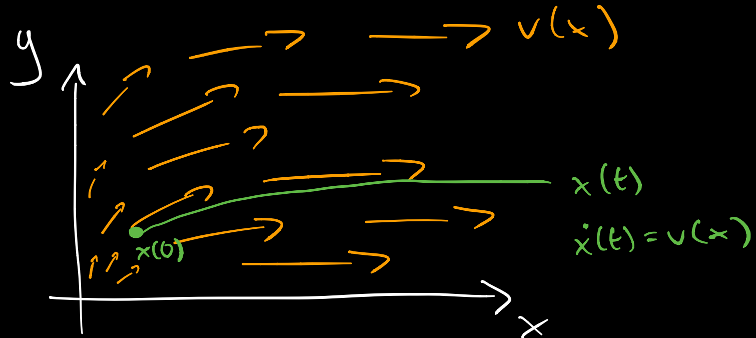
Existenzsatz sagt, dass zu jedem AWP:

$$x(0) = a \qquad (3)$$

genau eine Lösung $x(\cdot)$ von (2) existiert.

Und zwar ist $t \mapsto x_i(t)$ tatsächlich eine Kurve, falls a ein regulärer Punkt ist.

Ist $v(a) = 0 \Leftrightarrow a$ ein sing. Punkt, so lautet die Lösung des AWP (2)&(3) einfach $x(t) = a \;\; \forall t \in \mathbb{R}$.



Linienintegrale:

Interpretation: Arbeit = $\underset{\text{Vektorfeld}}{\text{Kraft}} \cdot \underset{\text{Linie}}{\text{Weg}}$

Teilen Weg in unendlich viele Wegstücke auf, integrieren über alle

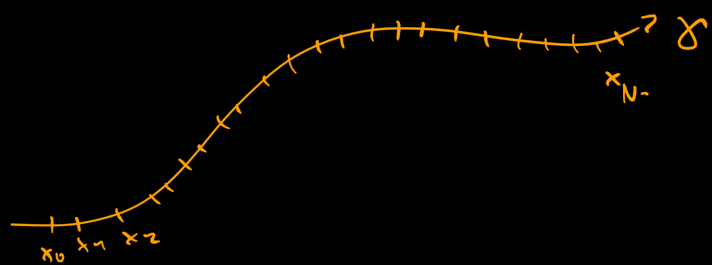
$\Rightarrow$ Richtung $\hat{=}$ Ableitung des Weges

$$W = \sum_{k=0}^{N-1} K(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} K(x(t_k)) \cdot x'(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

$$= \boxed{\int_a^b K(x(t)) \cdot x'(t)\,dt}$$

$x(t)$ der Weg ($\gamma(t)$)

$$= \boxed{\int_\gamma K \cdot ds}$$

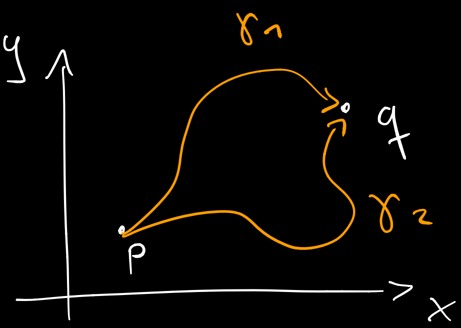


Eigenschaften:

- Linienintegr. unabhängig von der Parametrisierung von γ, aber abhängig von Richtung.

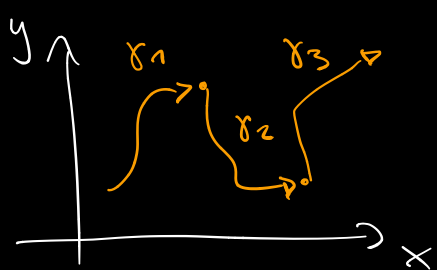
$$\boxed{\int_{-\gamma} K\,ds = -\int_\gamma K\,ds}$$

- Verschiede Linienint. von p nach q können verschiedene Werte annehmen:



$$\int_{\gamma_1} k\,ds \neq \int_{\gamma_2} k\,ds$$

1. Ketten: Wege γ müssen nur stückweise glatt sein



$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} k\,ds = \int_{\gamma_1} k\,ds + \int_{\gamma_2} k\,ds + \int_{\gamma_3} k\,ds}$$

sofern $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ glatt sind.

Stichwort: Nullmengen

Konservative Felder $\Leftrightarrow$ Potentialfelder:

Eigenschaften:

i)
$$\int_{\gamma_1} K\,ds = \int_{\gamma_2} K\,ds$$

$\forall\, \gamma_1, \gamma_2 \subset dom(K)$ mit denselben Anfangs- & Endpunkten

$\Rightarrow$ Linienintegral Wegunabhängig!

ii)
$$\oint_{\gamma} K\,ds = 0$$

$\forall$ geschlossenen Kurven $\gamma \subset dom(K)$

iii) $\exists p(x)$: $\boxed{K = \nabla p}$, p das Potential

iv)
$$\boxed{rot(K) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial K_n}{\partial x_i} = \frac{\partial K_i}{\partial x_n}}$$

Hauptbedingung um konservative Felder zu bestimmen

$\hookrightarrow$ in 2D: $Q_x - P_y = 0$ für $v = \begin{bmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{bmatrix}$ Feld nur 2 dim.!

iv) $\Rightarrow$ iii) gilt nur, falls $\Omega = dom(K)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

$\Leftrightarrow$ Man kann jede geschlossene Kurve $\gamma \subset \Omega$ auf einen Punkt zusammenziehen.

Hingegen gilt iii) => iv) immer ~> Alle konservativen Felder haben $\operatorname{rot} K = 0$.

(6.1) (a) Gradientenfelder sind konservativ

(b) Ist $K = \nabla p$, so gilt für alle von a nach b laufenden Kurven γ

$$\boxed{\int_\gamma K\,ds = p(b) - p(a)}$$ "Stammintegral"

Bem: Potential mehrdim. pendent zur Stammfunktion.

(6.2) (a) Konservative Felder besitzen ein Potential

(b) Man kann das Potential wie folgt berechnen:

$$\boxed{p(x) = \int_{x_0}^{x} K\,ds}$$

=> Wahl von x_0 gibt dann das Nullpotential – die Referenz an <=> "Ground"

Bem: Typische Wahl: $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\gamma: t \mapsto \begin{bmatrix} tx \\ ty \end{bmatrix}$

$t \in [0,1]$